

UNIVERSITÉ D'ANGERS  
ANNÉE 2015-2016  
ISTIA EI1 et EI2PM  
BASES de L'ANALYSE

Contrôle continu du 16/10/2015

Documents de cours et TD autorisés, calculatrices interdites.

**Exercice I** i) En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que si un rectangle a pour aire  $170m^2$ , alors sa longueur est supérieur à  $13m$ .

ii) Soit  $a$  un réel. A l'aide d'un raisonnement par contraposé, démontrer que si  $a^2$  n'est pas un multiple entier de 16, alors  $a/2$  n'est pas un entier pair.

**Exercice II** Ecrire à l'aide des quantificateurs la proposition  $A$  suivante:

Pour tout entier  $x$ , il existe un entier  $y$  tel que pour tout entier  $z$ , la relation  $z < y$  implique la relation  $z < x + 1$ .

puis donner sa négation.

La proposition  $A$  est-elle vraie?

**Exercice III** i) Démontrer que si  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $(10)^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 \times (10)^n - (10)^n + (-1)^n$ .

ii) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, et en utilisant i), la propriété suivante:

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, 10^n - (-1)^n \text{ est divisible par } 11.$$

**Exercice IV** Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont injectives, surjectives, bijectives:

i)  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, f(x) = x^2$ .

ii)  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x^2$ .

iii)  $h : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$ .

Donner la réciproque de celles qui sont bijectives.

**Exercice V** Calculer l'ensemble des  $x$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $2 < |x + 1| < 3$ .