Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Le barème projeté est indiqué entre parenthèses.

Exercice 1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et considérons l'application linéaire $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x+7y-2z \\ -2x+4y-z \\ -3x+5y-z \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$. On pose $\vec{\mathbf{v}} = g(\vec{\mathbf{u}})$ et $\vec{\mathbf{w}} = g(\vec{\mathbf{v}})$. Expliciter $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ et $g(\vec{\mathbf{w}})$. (3)
2. Est-ce que $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ et $g(\vec{\mathbf{w}})$ forment une famille libre ? génératrice ? (Justifier) (3)
3. Montrer que $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. (1,5)
4. Montrer que $g \circ g \circ g$ est l'application linéaire nulle, c'est-à-dire que pour tout vecteur $\vec{\mathbf{x}}$ de $\mathbb{R}^3$, $g \circ g \circ g(\vec{\mathbf{x}}) := g(g(g(\vec{\mathbf{x}}))) = \vec{0}$. (2,5)
5. (**Généralisation**) Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire possédant un vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ tel que la famille $\{\vec{\mathbf{u}}, h(\vec{\mathbf{u}}), \cdots, h^{\circ(n-1)}(\vec{\mathbf{u}})\}$ forme une base de $\mathbb{R}^n$ et que $h^{\circ n}(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Montrer que $h^{\circ n}$ est l'application linéaire nulle (une telle application est appelée *nilpotente*). (hors barème)

Exercice 2. Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice A dans les bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Pourquoi f ne peut-elle pas être injective ? (1)
   (b) Calculer des bases du noyau et de l'image de f. (2)
   (c) Soit B la matrice dans $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ d'une application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Montrer que $\det(BA) = 0$; a-t-on $\det(AB) = 0$? (2)
2. Expliquer pourquoi (2,5)
$$\begin{vmatrix} 2016 & 4 & 16 & 24 \\ 1008 & 3 & 9 & 12 \\ 504 & 2 & 4 & 6 \\ 252 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
3. Calculer $\det M$ où (2,5)
$$M = (A^5 + A^3)(B^7 + B^2), \quad A = \begin{pmatrix} a & z & y \\ 0 & b & x \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ w & q & 0 \\ v & u & r \end{pmatrix}$$