

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix},$$

dépendant d'un paramètre a réel, et déterminer, quand c'est possible, son inverse.

Exercice 2. Résoudre par la méthode de Cramer le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 3. 1.a. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le déterminant de ces deux matrices, et comparer leur parité. Ces deux matrices sont-elles inversibles ?

- b. Montrer que toute matrice carrée à coefficients entiers de taille 2 dont les éléments diagonaux sont impairs et les autres pairs est de déterminant impair.
- c. Montrer par récurrence que toute matrice carrée à coefficients entiers de taille n dont les éléments diagonaux sont impairs et les autres pairs est de déterminant impair.

On souhaite à présent résoudre l'énigme du berger suivante : Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard que peu importe le mouton qu'il choisit, il peut toujours scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux groupes de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Comme a-t-il fait ?

Afin de résoudre l'énigme du berger, on numérote les moutons de 1 à 101, et on construit une matrice carrée M de taille 101 comme suit : la i -ème ligne de M correspond à la séparation du troupeau en deux groupes de 50 lorsque l'on retire le mouton i . On associe la valeur 1 au mouton retiré, la valeur 0 aux moutons placés dans le groupe 1 et la valeur 2 aux moutons placés dans le groupe 2.

2.a. Que vaudrait la matrice M si le troupeau n'était composé que de 3 moutons ?

b. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, et on note X le vecteur constitué des poids des différents moutons.

Que vaut MU ? Et MX ?

- c. Montrer que M est une matrice inversible (on pourra pour cela se servir de la question 1).
- d. En déduire la solution de l'énigme du berger.