Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soient

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\mathbf{u}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{U}$.
2. Soit $\vec{\mathbf{w}}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées -2, 1, -1 dans la base $\mathcal{U}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\mathbf{w}}$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. On considère maintenant le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées 1, 0, 1 dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\mathbf{v}}$ dans la base $\mathcal{U}$.

Exercice 2. Soient $\vec{\mathbf{u}}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a+c \\ 3a-2b-c \\ b+2c \\ 2a+3b+8c \end{pmatrix}$ et A l'ensemble des $\vec{\mathbf{u}}_{a,b,c}$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et en donner une famille génératrice.
2. Trouver une base de A extraite de la famille génératrice précédente et donner la dimension de A.
3. Montrer que A est l'ensemble des solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ du système $\begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ -2x - 3z + t = 0 \end{cases}$

Exercice 3. Soit A une matrice à deux lignes et deux colonnes vérifiant

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

1. Calculez A.
2. Montrer que l'application $g_\lambda : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est linéaire pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice M_λ de g_λ vaut $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
3. Chercher les valeurs de λ pour lesquelles le système
$$(S) \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - g_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
admet au moins deux solutions distinctes.
4. Pour chacune des valeurs de λ obtenues à la question précédente, déterminer une base de l'ensemble des solutions de (S).
5. Calculer la dimension des sous-espaces vectoriels obtenus dans la question précédente.