Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et considérons l'application linéaire

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x - y + z \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice de f.
2. Donner une base et la dimension de $Ker(f)$. Faire de même pour $Im(f)$. L'application f est-elle bijective ? (Justifier votre réponse)
3. Soient $\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\vec{\mathbf{u}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que ces 3 vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{V}$. Expliciter $f(\vec{\mathbf{u}}_1)$ et l'exprimer comme combinaison linéaire des $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3$. Faire de même pour $f(\vec{\mathbf{u}}_2)$ et $f(\vec{\mathbf{u}}_3)$.
4. Soit $\vec{\mathbf{w}}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées -2, 1, -1 dans la base $\mathcal{V}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\mathbf{w}}$ dans la base $\mathcal{B}$.
   On considère maintenant le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées 1, 0, 1 dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\mathbf{v}}$ dans la base $\mathcal{V}$.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire vérifiant

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. L'application f est-elle déterminée de manière unique ? Est-elle bijective ?
2. Montrer que $g_\lambda\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est linéaire pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner une forme matricielle de g_λ.
3. Chercher les valeurs λ pour lesquelles le système

$$(S) \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - g_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   admet au moins deux solutions. Pour chacune de ces valeurs de λ, déterminer une base de l'ensemble des solutions de (S).