CC2, Base d'algèbre, Le 6 Dec. 2013

Durée : 1h20

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et considérons l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - y + z \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice de f.
2. Donner une base et la dimension de $Ker(f)$. Faire de même pour $Im(f)$. L'application f est-elle bijective ? (Justifier votre réponse)
3. Montrer que $f \circ f = f$. En déduire que pour tout vecteur $\vec{\mathbf{v}} \in Im(f)$ (c'est-à-dire $\vec{\mathbf{v}} = f(\vec{\mathbf{x}})$ pour un certain $\vec{\mathbf{x}}$), on a $f(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{v}}$.
4. Soient $\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\vec{\mathbf{u}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que ces 3 vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{V}$. Expliciter $f(\vec{\mathbf{u}}_1)$ et l'exprimer comme combinaison linéaire des $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3$. Faire de même pour $f(\vec{\mathbf{u}}_2)$ et $f(\vec{\mathbf{u}}_3)$.
5. Soit $\vec{\mathbf{w}}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées -2, 1, -1 dans la base $\mathcal{V}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\mathbf{w}}$ dans la base $\mathcal{B}$.
   On considère maintenant le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées 1, 0, 1 dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\mathbf{v}}$ dans la base $\mathcal{V}$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et considérons l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\text{définie par} \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 7y - 2z \\ -2x + 4y - z \\ -3x + 5y - z \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$. On pose $\vec{\mathbf{v}} = g(\vec{\mathbf{u}})$ et $\vec{\mathbf{w}} = g(\vec{\mathbf{v}})$. Expliciter $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ et $g(\vec{\mathbf{w}})$. Que vaut $g \circ g(\vec{\mathbf{w}})$?
2. Est-ce que $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ et $g(\vec{\mathbf{w}})$ forment une famille libre ? génératrice ? (Justifier)
3. Montrer que $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que $g \circ g \circ g$ est l'application linéaire nulle, c'est-à-dire que pour tout vecteur $\vec{\mathbf{x}}$ de $\mathbb{R}^3$, $g \circ g \circ g(\vec{\mathbf{x}}) := g(g(g(\vec{\mathbf{x}}))) = \vec{0}$.
5. (**Généralisation**) Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire possédant un vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ tel que la famille $\{\vec{\mathbf{u}}, h(\vec{\mathbf{u}}), \cdots, h^{\circ(n-1)}(\vec{\mathbf{u}})\}$ forme une base de $\mathbb{R}^n$ et que $h^{\circ n}(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Montrer que $h^{\circ n}$ est l'application linéaire nulle (une telle application est appelée *nilpotente*).

FIN