

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1. Soient $I = I_3$ la matrice identité d'ordre 3 et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A - 5I$ et $A - 2I$, puis $(A - 5I)(A - 2I)$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et I .

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$.

1. Calculer B^n pour tout n .
2. En déduire l'expression de A^n en fonction de n , A et A^2 .

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -20 \\ -10 & 21 & -100 \\ -2 & 4 & -19 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Echelonner la matrice augmentée $(A|\vec{b})$. Résoudre le système suivant :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}.$$

(b) Déterminer le rang de la matrice A ainsi que le rang de la matrice augmentée $(A|\vec{b})$.

(c) Calculer A^2 . En déduire que $A^n = Id$ si n est pair et $A^n = A$ si n est impair.

(d) Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{c}$ avec cette fois-ci $\vec{c} = \begin{pmatrix} -25 \\ -131 \\ -25 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Déterminer toutes les solutions du système $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 2az - x = 0 \end{cases}$ et les présenter sous la forme d'un sous espace vectoriel engendré. Ici a est un paramètre et x, y, z sont les variables inconnues.