EI1 **Contrôle continu 1 — 1h20** **Algèbre linéaire** ISTIA 2013-2014

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.... Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (7 pts)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -20 \\ -10 & 21 & -100 \\ -2 & 4 & -19 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Echelonner la matrice augmentée $(A|\vec{b})$. Résoudre le système suivant :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}.$$

(b) Déterminer le rang de la matrice A ainsi que le rang de la matrice augmentée $(A|\vec{b})$.

(c) Calculer A^2. En déduire $A^n = Id$ si n est pair, et que $A^n = A$ si n est impair.

(d) Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{c}$ avec cette fois-ci $\vec{c} = \begin{pmatrix} -25 \\ -131 \\ -25 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. (10 pts) Soient le matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer P^{-1}.
2. Soit $C = PAP^{-1}$. Calculer explicitement C.
3. Exprimer A en fonction de C et P. En déduire A^n pour $n > 1$.
4. Soient $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ les vecteurs de la base canonique en dimension 2. Soit $\vec{u} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$. Exprimer, si possible, $\vec{u}$ comme combinaison linéaire des deux vecteurs $P\vec{e}_1$ et $P\vec{e}_2$.
5. Est-ce que tout vecteur en dimension 2 peut s'exprimer comme combinaison linéaire des $P\vec{e}_1$ et $P\vec{e}_2$. ?

Exercice 3. (3 pts) Déterminer toutes les solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y - 2az - x = 0 \end{array} \right.$ et les présenter sous la forme vectorielle (autrement dit comme un sous espace vectoriel). Ici a est un paramètre et x, y, z sont les variables inconnues.